

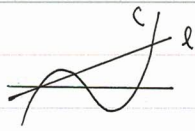
2013年

東大数学

文系第1問①

$C: y = x(x-1)(x-3)$

$L: y = tx$



(1) CとLの交点を考えるため、連立すると

$x(x-1)(x-3) = tx$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 4x + 3 - t) = 0$

$\Leftrightarrow x=0$ または $x^2 - 4x + 3 - t = 0 \dots ①$

原点

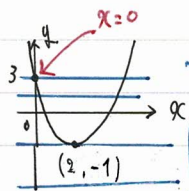
原点以外に共有点を持つほしい。

\Rightarrow 原点以外に共有点がない、はたしてありうるか。

① $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = t$ とし、 $y = x^2 - 4x + 3$ と $y = t$ の交点を考える。

右図より、 $y = x^2 - 4x + 3$ と $y = t$ は

- $t \geq -1$ のときに、 $x=0$ のみ交点を持つというよりはなく、必ず $x=0$ 以外の交点がある。
- $t < -1$ のときは、交点はない。



ここで、 $x=0$ 以外の交点を探る。

よって、 $t \geq -1$ のときは、CとLは、常に原点以外の交点を持つ。以下、 $t \geq -1$ で考える。

よって、 t の範囲は $t \geq -1$

$P(p, tp) \quad Q(q, tq)$ とおく (p, q は実数)

よって

$|\vec{OP}| = \sqrt{p^2 + t^2 p^2} = |p| \sqrt{1+t^2}$

$|\vec{OQ}| = \sqrt{q^2 + t^2 q^2} = |q| \sqrt{1+t^2}$ なのて

計算するだけ

$g(t) = |p| \sqrt{1+t^2} \times |q| \sqrt{1+t^2} = |pq| (t^2+1)$

ここで、 p, q は

① $x^2 - 4x + 3 - t = 0$ の2解なので、解と係数の関係より

$\begin{cases} p+q = 4 \\ pq = 3-t \end{cases}$ 結果として、使わないが、この時点で必ず使わない式かは判断できたい。

$g(t) = |3-t|(t^2+1) = |t-3|(t^2+1)$ $\leftarrow t=3$ で折れこむ。
 $= \begin{cases} (t-3)(t^2+1) & (t \geq 3 \text{ のとき}) \\ -(t-3)(t^2+1) & (-1 \leq t \leq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$

(i) $-1 \leq t \leq 3$ のとき

$g'(t) = -3t^2 + 6t - 1$

$g'(t) = 0$ を解くと、 $t = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$ $d = \frac{3-\sqrt{6}}{3}$ $\beta = \frac{3+\sqrt{6}}{3}$ と解る。

増減表は

t	-1	d	β	3	
$g'(t)$	-	0	+	0	-
$g(t)$		\searrow 極小	\nearrow 極大	\searrow	

(ii) $t \geq 3$ のとき

$g'(t) = 3t^2 - 6t + 1$

$= 3(t-1)^2 - 2$

これは、 $t \geq 3$ で、 $g'(t) \geq 10$ なのて、 $g(t)$ は単調増加。

よって、(i) と (ii) をまとめ、 $t \geq -1$ の増減表は

t	-1	d	β	3	
$g'(t)$	-	0	+	0	+
$g(t)$		\searrow 極小	\nearrow 極大	\searrow 極小	\nearrow

2つの増減表を結合すると、ここで初めて見つかは極小値

よって、極小値は $g(d)$ と $g(3)$ 極大値は $g(\beta)$

$g(3) = 0$

$g(d) = \frac{36-4\sqrt{6}}{9}$

$g(\beta) = \frac{36+4\sqrt{6}}{9}$

極小値は $\frac{36-4\sqrt{6}}{9}$ ($t = \frac{3-\sqrt{6}}{3}$)
 0 ($t = 3$)
 極大値は $\frac{36+4\sqrt{6}}{9}$ ($t = \frac{3+\sqrt{6}}{3}$)

$g(d)$ $g(\beta)$ の求め方は、2種類

割り算か、(2次)=(1次)の式で次数下げ、 $y = (x)$ 詳しくは、次10-3

2013年

東大数学

文系第1問②

求め方1. 割り算

$-1 \leq t \leq 3$ の $g(t)$ と $g'(t)$ の割り算

$$g(t) = -t^3 + 3t^2 - t + 3$$

$$g'(t) = -3t^2 + 6t - 1 \quad \text{より}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & & \\ -3 & 6 & -1 & -1 & 3 & -1 & 3 \\ & & -1 & 2 & -\frac{1}{3} & & \\ \hline & & & 1 & -\frac{2}{3} & 3 & \\ & & & & 1 & -2 & \frac{1}{3} \\ \hline & & & & & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{array}$$

$$g(t) = \underbrace{g'(t)}_{d \neq 0 \text{ は}} \underbrace{\left(\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}\right)}_{\text{商}} + \underbrace{\frac{4}{3}t + \frac{8}{3}}_{\text{余り}}$$

$g'(t) = 0$ の解

$$\begin{aligned} g(d) &= g'(d) \left(\frac{1}{3}d - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{3}d + \frac{8}{3} \\ &= 0 + \frac{4}{3} \times \frac{3-\sqrt{6}}{3} + \frac{8}{3} \\ &= \frac{36-4\sqrt{6}}{9} \end{aligned}$$

同様に $g(\theta) = \frac{36+4\sqrt{6}}{9}$

求め方2 次数下げ

$$g'(d) = -3d^2 + 6d - 1 = 0 \quad \text{より}$$

$$d^2 = 2d - \frac{1}{3} \quad \text{(2次) = (1次) の式}$$

代入すると 1次減る

$$\begin{aligned} g(d) &= -d^3 + 3d^2 - d + 3 \\ &= -d \left(2d - \frac{1}{3}\right) + 3 \left(2d - \frac{1}{3}\right) - d + 3 \\ &= \dots \\ &= -2d^2 + \frac{16}{3}d + 2 \\ &= -2 \left(2d - \frac{1}{3}\right) + \frac{16}{3}d + 2 \end{aligned}$$

$$= \dots = \frac{4}{3}d + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{3-\sqrt{6}}{3} + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{36-4\sqrt{6}}{9}$$

同様に $g(\theta) = \frac{36+4\sqrt{6}}{9}$

2013年

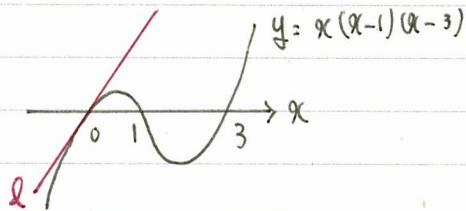
東大数学

文系第1問③

別解: ベクトルの内積を利用

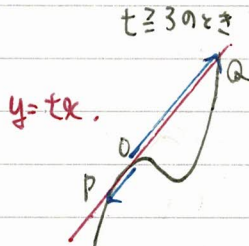
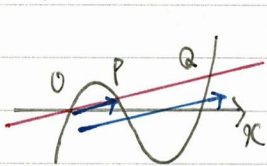
 $g(t) = \sqrt{OP} \cdot \sqrt{OQ}$ から、ベクトルを想起 $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = |\vec{OP}| \cdot |\vec{OQ}| \cos \theta$ から、 $\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$ と $\cos \theta$ の値を調べる。• $P(p, tp)$ $Q(q, tq)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \vec{OP} \cdot \vec{OQ} &= (p, tp) \cdot (q, tq) \quad \text{成分で内積} \\ &= pq + t^2 pq \\ &= pq(1+t^2) \end{aligned}$$

• θ は t の値によつて 0 から π に変わる。 $(x=0)$ における接線 ℓ $y = x(x-1)(x-3)$ の、 $x=0$ における接線 ℓ の傾きは

$$y' = 3x^2 - 8x + 3 \quad \text{に } x=0 \text{ を代入して}$$

$$y' = 3 \quad \text{よつて、傾きは } 3.$$

(i) $t \leq 3$ のとき P が $x < 0$ になる。 \vec{OP} と \vec{OQ} は同方向き。 \vec{OP} と \vec{OQ} は逆方向き

$\theta = 0, \cos \theta = 1$

$\theta = \pi, \cos \theta = -1$

$$\text{よつて、} \cos \theta = \begin{cases} 1 & (-1 \leq t \leq 3) \\ -1 & (t \geq 3) \end{cases}$$

$$\text{よつて } \vec{OP} \cdot \vec{OQ} = |\vec{OP}| |\vec{OQ}| \cos \theta \quad (*)$$

$$|\vec{OP}| |\vec{OQ}| = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OQ}}{\cos \theta} = \begin{cases} pq(1+t^2) & (-1 \leq t \leq 3) \\ -pq(1+t^2) & (t \geq 3) \end{cases}$$

よつて、本解答と同様。